Projektif Geometri Bütünleme Sınavı(18/06/2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) Bir $\mathbb{A}$ Afin düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın daima var olduğunu ispatlayınız.

2.) Bir Afin düzleminde birbirine paralel doğrulardan oluşan herhangi iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğunu ve bu sayının düzlemin mertebesine eşit olduğunu gösteriniz. Böyle $n+1$ tane kümenin (paralel doğru demetinin) var olduğunu gösteriniz.

3.) Herhangi bir cisim kullanmaksızın, 16 noktalı bir afin düzlem kurunuz

4.) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$,

$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}\}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki çizelgede "$N_i \circ d_j \Leftrightarrow i.$ satır $j.$ kolon da ■ görülüyor" ile tanımlanmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir projektif düzlem olup olmadığını araştırınız.

$\circ$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
N_1	■			■				■			■		
N_2			■				■			■	■		
N_3		■			■				■		■		
N_4	■		■		■	■							
N_5				■		■	■		■				
N_6		■				■		■		■			
N_7	■								■	■		■	
N_8					■		■	■				■	
N_9		■	■	■								■	
N_{10}	■	■					■						■
N_{11}			■					■	■				■
N_{12}				■	■					■			■
N_{13}						■					■	■	■

5.) İşlemleri aşağıdaki çizelgelerle verilen $GF(2) = \{0,1\}$ cismi yardımıyla tanımlanan afin düzlemlere ait bütün doğru ve noktaları bulunuz. $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ noktalarının hangi doğrular üzerinde olduğunu gösteriniz.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

NOT: Süre 90 dakikadır. BAŞARILAR.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) (A3) aksiyomu gereğince $\mathbb{A}$ da doğrudaş olmayan üç nokta vardır, bunlar $K, L, M \in \mathcal{N}$ olsun.

(A1) aksiyomu gereğince M ve L yi birleştiren ML doğrusu vardır ve K noktası ML üzerinde değildir. Yani, $K \not\circ ML$. Çünkü; K, L ve M yi doğrudaş olmayan üç nokta olarak seçtik.

$K \not\circ ML \overset{A2 \text{ den}}{\Longrightarrow} \exists\, k \in \mathcal{D} \ni K \circ k,\ k \parallel ML$ dir.

$M \not\circ KL \overset{A2 \text{ den}}{\Longrightarrow} \exists\, m \in \mathcal{D} \ni M \circ m,\ m \parallel KL$ dir. Ayrıca (A1) den $\exists\, KL \in \mathcal{D} \ni M \not\circ KL$ dir.

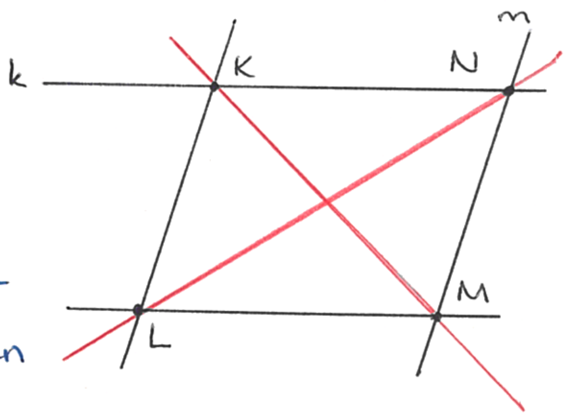
İddia 1: $k \neq m$ dir. Çünkü $k = m$ olsa idi $k = ML$ doğrusu ML ye paralel olamaz (çünkü M ortak). Halbuki $k \parallel ML$ almıştık. $k \nparallel m$ olur. Çünkü $k \parallel m$ olursa $KL \parallel m \parallel k \parallel ML$ olurdu ki bu da Teorem 2.2.4 ($\mathbb{A}$ Afin düzleminde $b, c, d \in \mathcal{D}$ için $b \parallel c$ ve $c \parallel d$ ise $b = d$ ya da $b \parallel d$ dir) gereğince $KL = ML$ veya $KL \parallel ML$ dir.

$KL = ML \Rightarrow K, L, M$ nin doğrudaş olması demektir. Bu ise hipoteze aykırıdır.

$KL \parallel ML \Rightarrow L \circ KL$ ve $L \circ ML$ olduğundan bu da mümkün değildir.

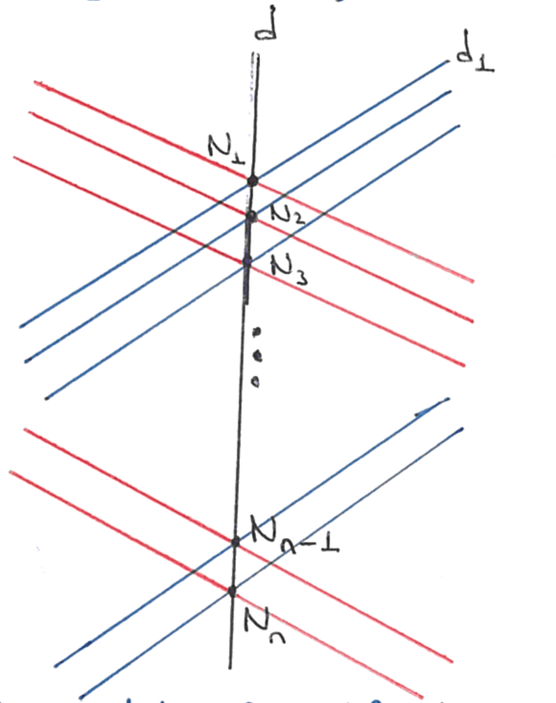
İddia 2: $k \neq m$ ve $k \nparallel m$ ise k ve m doğruları bir noktada kesişir. Yani, $\exists\, N \in \mathcal{N} \ni N = k \wedge m$ olacak şekilde 4. cü bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

Sonuç: N noktası KL ye paralel olan m doğrusu üzerinde bulunduğundan $N \neq K$ ve $N \neq L$ dir. Benzer olarak N noktası k üzerinde bulunduğundan $N \neq M$ dir. Dolayısıyla N, istenen özellikteki 4. noktadır.



C-2) d_1 ve d_2'; farklı iki paralel demetine ait doğrular olsunlar. Bu durumda $d_1 \nparallel d_2$ olup $d_1 d_2 = N_1$ olacak şekilde $N_1 \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

En küçük afin düzlemde bir noktadan 3 doğru geçtiğinden d_1 ve d_2 den farklı olarak N den geçen bir başka d doğrusu vardır. Bir doğru üzerinde (afin düzlemde bir doğru üzerinde) n-tane nokta bulunduğundan dolayı d doğrusu üzerinde n nokta vardır. Bu noktalar $N_1, N_2, \ldots, N_n$ olsun. (A2) aksiyomu gereğince $\forall N_i$ den geçen ve d_1'e paralel olan doğrular ile $\forall N_i$ den geçen ve d_2'ye paralel olan doğrular vardır. Böylece $\forall N_i$ sayesinde d_1 ve d_2'yi kapsayan paralel doğru demetleri arasında 1-1 ve örten bir fonksiyon kurulmuş olur.



Açıkça paralel doğru demetleri ayrıktır. Bir Afin düzlemde toplam n^2+n tane doğrunun var olduğunu biliyoruz. Her bir paralel doğru demetinde n tane doğru olduğundan

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1$$ tane paralel doğru demeti vardır.

Cevaplar (18/06/2019) - 3

C-3) $\mathcal{A}$ afin düzleminde 16 nokta olması istendiğine göre $n^2=16 \Rightarrow n=4$ düzlemin mertebesidir.

Toplam doğru sayısı $=n^2+n$ den $4^2+4=20$ dir.

Bir afin düzlemde $(n+1)$-tane paralel doğru demeti vardır ve her demet afin düzlemin mertebesi kadar doğru içerir. Buna göre 16 noktalı afin düzlemde 5 tane paralel doğru demeti ve her demet 4 doğru içerir. Ayrıca her doğru 4 nokta kapsar.

$$\mathcal{N}=\{N_1, N_2, \ldots, N_{16}\}, \quad \mathcal{D}=\{d_1, d_2, \ldots, d_{20}\}.$$

Buna göre $d_1 /\!/ d_2 /\!/ d_3 /\!/ d_4$ olacak şekilde 1. grup paralel doğru demetini belirleyelim:

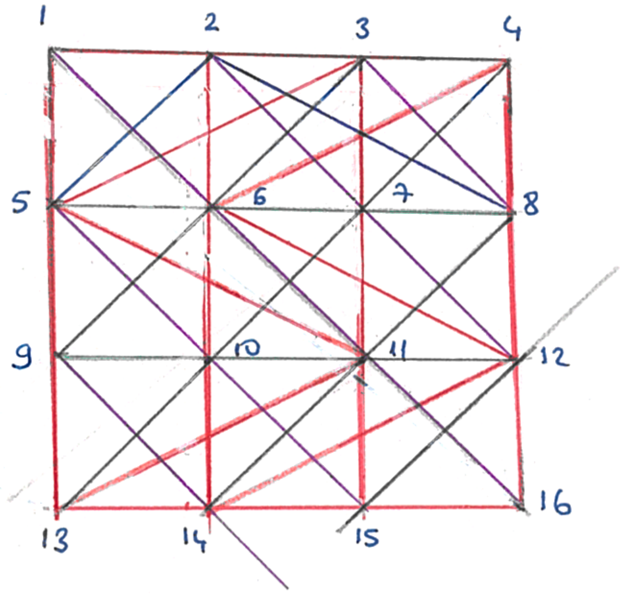
I. Grup
$$\begin{cases} d_1=\{N_1, N_2, N_3, N_4\} \\ d_2=\{N_5, N_6, N_7, N_8\} \\ d_3=\{N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}\} \\ d_4=\{N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}\} \end{cases}$$

II. Grup
$$\begin{cases} d_5=\{N_1, N_5, N_9, N_{13}\} \\ d_6=\{N_2, N_6, N_{10}, N_{14}\} \\ d_7=\{N_3, N_7, N_{11}, N_{15}\} \\ d_8=\{N_4, N_8, N_{12}, N_{16}\} \end{cases}$$

III. Grup
$$\begin{cases} d_9=\{N_1, N_6, N_{11}, N_{16}\} \\ d_{10}=\{N_2, N_7, N_{12}, N_{16}\} \\ d_{11}=\{N_5, N_{10}, N_{15}, N_4\} \\ d_{12}=\{N_3, N_8, N_9, N_{14}\} \end{cases}$$

IV. Grup
$$\begin{cases} d_{13}=\{N_4, N_7, N_{10}, N_{13}\} \\ d_{14}=\{N_3, N_6, N_9, N_{16}\} \\ d_{15}=\{N_8, N_{11}, N_{14}, N_1\} \\ d_{16}=\{N_2, N_5, N_{12}, N_{15}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{17}=\{N_1, N_7, N_9, N_{15}\} \\ d_{18}=\{N_2, N_8, N_{10}, N_{16}\} \\ d_{19}=\{N_3, N_5, N_{11}, N_{13}\} \\ d_{20}=\{N_4, N_6, N_{12}, N_{14}\} \end{cases}$$



I. grup: x-eksenine paralel doğru demeti

II. grup: y-eksenine paralel doğru demeti

Cevap Anahtarı (18/06/2019)

C-4) (P1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer mi?

$N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $N_1 \neq N_2$ için $N_1 \circ d_{11}$, $N_2 \circ d_{11} \Rightarrow N_1 N_2 = d_{11}$ olup N_1 ve N_2 den geçen başka doğru yoktur.

$N_7, N_8 \in \mathcal{N}$ için $N_7 \circ d_{12}$, $N_8 \circ d_{12} \Rightarrow N_7 N_8 = d_{12}$ olup N_7 ve N_8 den geçen başka bir doğru yoktur.

Kısacası verilen tabloda herhangi iki satırda aynı kolon numaralı birer kutu olduğundan (P1) aksiyomu sağlanır.

(P2) Farklı iki doğru tek bir noktada kesişir mi?

$d_{11}, d_{12} \in \mathcal{D}$ için $d_{11} \wedge d_{12} = N_{13}$ olacak şekilde bir tek $N_{13} \in \mathcal{N}$ vardır.

$d_5, d_6 \in \mathcal{D}$ için $d_5 \wedge d_6 = N_4$ olacak şekilde bir tek $N_4 \in \mathcal{N}$ vardır.

Benzer şekilde farklı iki doğrular çoğaltılabilir. Yani herhangi iki kolonda aynı satır numaralı birer tek kare kutu olduğundan iki doğru bir ortak noktaya sahiptir.

(P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta var mıdır?

N_1, N_2, N_4, N_5 böyle bir dörtlüdür.

C-5)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Toplam nokta sayısı n^2 olduğundan, $n=2$, $2^2=4$ dir.

Toplam doğru sayısı $=n^2+2$ den $2^2+4=6$ dır.

$\mathcal{N}=\mathbb{F}\times\mathbb{F}=\{0,1\}\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{F}\}$.

$\mathcal{D}=\{[m,b]\mid m,b\in\mathbb{F}\}\cup\{[a]\mid a\in\mathbb{F}\}=\{[0,0],[0,1],[1,0],[1,1]\}\cup\{[0],[1]\}$.

$\circ:\ (x,y)\circ[m,b]\Leftrightarrow y=mx+b$,

$(x,y)\circ[a]\Leftrightarrow x=a$ dır.

(i) $(0,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.0+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $0=0.0+b\Rightarrow b=0$,

$m=1$ için $0=1.0+b\Rightarrow b=0$

$(0,0)\circ[0,0]$, $(0,0)\circ[1,0]$ dır.

$(0,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=0\Rightarrow(0,0)\circ[0]$ dır. Buna göre $(0,0)$ noktası $[0,0],[1,0],[0]$ doğruları üzerindedir.

(ii) $(0,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.0+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $1=0.0+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.0+b\Rightarrow b=1$, $(0,1)\circ[x]\Leftrightarrow x=0$.

Buna göre, $(0,1)$ noktası $[0,1],[1,1],[0]$ doğruları üzerindedir.

(iii) $(1,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.1+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $1=0.1+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.1+b\Rightarrow b=0$, $(1,1)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $(1,1)$ noktası $[0,1],[1,0],[1]$ doğruları üzerindedir.

(iv) $(1,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.1+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $0=0.1+b\Rightarrow b=0$, $m=1$ için $0=1.1+b\Rightarrow b=1$, $(1,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $(1,0)$ noktası $[0,0],[1,1],[1]$ doğruları üzerindedir.

Dolayısıyla $\mathbb{A}_2\mathbb{F}$ afin düzleminin noktaları ve karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiştir:

$(0,0)$: $[0,0],[1,0],[0]$

$(0,1)$: $[0,1],[1,1],[0]$

$(1,1)$: $[0,1],[1,0],[1]$

$(1,0)$: $[0,0],[1,1],[1]$